8° Ca 49 (6)

MÉMOIRE

SUR UNE NOUVELLE

EXPÉRIENCE ÉLECTRO-DYNAMIQUE,

SUR

SON APPLICATION A LA FORMULE QUI REPRÉSENTE L'ACTION MUTUELLE DE DEUX ÉLÉMENS DE DEUX CONDUCTEURS VOLTAÏQUES, ET SUR DE NOUVELLES CONSÉQUENCES DÉDUITES DE CETTE FORMULE;

SUIVI

D'UNE LETTRE A M. GHERARDI,

RELATIVE A L'EXPLICATION DE QUELQUES PHÉNOMÈNES ÉLECTRO-DYNAMIQUES;

PAR M. AMPÈRE,

Membre de l'Académie royale des Sciences, de la Société royale d'Edimbourg, de la Société Helvétique, de la Société philosophique de Cambridge, et de celle de Physique et d'Histoire naturelle de Genève.

A PARIS,

Chez { CROCHARD, Libraire, cloître Saint-Benoît, n° 16;
et BACHELIER, Libraire, quai des Augustins, n° 55.

1825.

DE L'IMPRIMERIE DE FEUGUERAY,

RUE DU CLOÎTRE SAINT-BENOÎT, N° 4.

MÉMOIRE

SUR UNE NOUVELLE

EXPÉRIENCE ÉLECTRO-DYNAMIQUE.

(Lu à l'Académie royale des Sciences, dans la séance du 12 septembre 1825.)

(Extrait des *Annales de Chimie et de Physique*, 1825.)

La manière dont j'ai déterminé la relation des deux coefficiens de la formule par laquelle j'ai représenté l'action mutuelle de deux élémens de courans électriques dans le Mémoire que j'ai lu à l'Académie le 10 juin 1822, étant sujette à quelque difficulté, j'ai cherché à établir cette relation d'une manière plus simple et plus directe : j'y suis parvenu aisément à l'aide d'un instrument que je vais d'abord décrire; j'exposerai ensuite quelques nouveaux résultats que j'ai déduits de la même formule.

Sur un pied TT' (fig. 3), en forme de table, s'élèvent deux colonnes EF, $E'F'$, liées entr'elles par deux traverses LL', FF'; un axe GH est maintenu entre ces deux traverses dans une position verticale. Ses deux extrémités G, H, terminées en pointes aiguës, entrent dans deux trous coniques pratiqués, l'un dans la traverse inférieure LL', l'autre à l'extrémité d'une vis KZ portée par la traverse supérieure FF', et destinée à presser l'axe GH sans le forcer. En C est fixé invariablement à

cet axe un support QCO dont l'extrémité O présente une charnière dans laquelle est engagé par son milieu un arc de cercle AA' formé d'un fil métallique qui reste constamment dans une position horizontale, et qui a pour rayon la distance du point O à l'axe. Cet arc est équilibré par un contre-poids Q, afin de diminuer le frottement de l'axe GH dans les trous coniques où ses extrémités sont reçues.

Au-dessous de l'arc AA' sont disposés deux augets M, M' pleins de mercure, de telle sorte que la surface du mercure, s'élevant au-dessus des bords, vienne toucher l'arc AA' en B et B'. Ces deux augets communiquent par des conducteurs métalliques $MN, M'N'$ avec des coupes P, P' pleines de mercure. La coupe P et le conducteur MN qui la réunit à l'auget M sont fixés à un axe vertical qui s'enfonce dans la table de manière à pouvoir tourner librement. La coupe P', à laquelle est attaché le conducteur $M'N'$, est traversée par le même axe, autour duquel elle peut tourner aussi indépendamment de l'autre. Elle en est isolée par un tube de verre V qui enveloppe cet axe, et par une rondelle de verre U qui la sépare du conducteur de l'auget M, de manière qu'on peut disposer les conducteurs $MN, M'N'$ sous l'angle qu'on veut.

Deux autres conducteurs $IR, I'R'$ attachés à la table plongent respectivement dans les coupes P, P', et les font communiquer avec des cavités R, R' creusées dans la table et remplies de mercure. Enfin, une troisième cavité S pleine également de mercure se trouve entre les deux autres.

Voici la manière de faire usage de cet appareil : on

fait plonger l'un des rhéophores, par exemple, le rhéophore positif, dans la cavité R, et le rhéophore négatif dans la cavité S, qu'on met en communication avec la cavité R' par un conducteur curviligne d'une forme quelconque. Le courant suit le conducteur RI, passe dans la coupe P, de là dans le conducteur NM, dans l'auget M, dans la partie BB' de l'arc AA', dans l'auget M', le conducteur $M'N'$, la coupe P', le conducteur $I'R'$, et enfin de la cavité R' dans le conducteur curviligne qui se rend dans la cavité S, où plonge le rhéophore négatif.

D'après cette disposition, le circuit voltaïque total se compose :

1°. De l'arc BB' et des conducteurs $MN, M'N'$;

2°. D'un circuit formé des parties $RIP, P'I'R'$ de l'appareil, du conducteur curviligne qui va de R' en S et de la pile elle-même.

Ce dernier circuit doit agir comme un circuit fermé puisqu'il n'est interrompu que par l'épaisseur du verre qui isole les deux coupes P, P' : il suffira donc d'observer son action sur l'arc BB' pour constater par l'expérience l'action d'un circuit fermé sur un arc dans les différentes positions qu'on peut lui donner.

Lorsqu'au moyen de la charnière O on met l'arc AA' dans une position telle que son centre soit hors de l'axe GH, cet arc prend un mouvement et glisse sur le mercure des augets MM' en vertu de l'action du courant curviligne fermé qui va de R' en S. Si, au contraire, son centre est dans l'axe, il reste immobile : le circuit fermé est donc alors sans action pour le faire tourner autour de l'axe, et cela quelle que soit la gran-

deur de la partie BB' déterminée par l'ouverture de l'angle des conducteurs MN, $M'N'$. Si donc on prend successivement deux arcs BB' qui diffèrent peu l'un de l'autre, comme le moment de rotation est nul pour chacun d'eux, il sera nul pour leur petite différence, et par conséquent pour tout élément de circonférence dont le centre est dans l'axe; d'où il suit que la direction de l'action qu'exerce le circuit fermé sur l'élément passe par cet axe, et qu'elle est par conséquent perpendiculaire à l'élément.

Lorsque l'arc AA' est situé de manière que son centre soit dans l'axe, les portions de conducteurs MN, $M'N'$ exercent sur l'arc BB' des actions répulsives égales et opposées, en sorte qu'il ne peut en résulter aucun effet; et puisqu'il n'y a pas de mouvement, on est sûr qu'il n'y a pas de moment de rotation produit par le circuit fermé.

Lorsque l'arc AA' se meut dans l'autre situation où nous l'avions d'abord supposé, les actions des conducteurs MN et $M'N'$ ne sont plus égales : on pourrait croire que le mouvement n'est dû qu'à cette différence; mais suivant qu'on approche ou qu'on éloigne ce circuit curviligne qui va de R' en S, le mouvement est augmenté ou diminué; ce qui ne permet pas de douter que le circuit fermé ne soit pour beaucoup dans l'effet observé.

Une fois qu'on a établi par cette expérience que l'action d'un circuit fermé sur un élément de circuit voltaïque est toujours perpendiculaire à la direction de cet élément, on peut en déduire, par un calcul très-simple, la relation entre n et k, que j'avais d'abord trouvée par un

autre procédé. Il suffit en effet, pour cela, de décomposer l'action qu'exerce sur l'élément que l'on considère chacun des élémens du circuit fermé en deux forces, l'une perpendiculaire à cet élément, et l'autre qui ait la même direction que lui, et que je nommerai *force tangentielle élémentaire*; puis de faire la somme de toutes les forces tangentielles élémentaires produites par le circuit fermé, et d'égaler à zéro cette somme, qui est la force tangentielle due à tout le circuit : or, si l'on représente par ds' l'élément sur lequel il agit, par ds un élément de ce même circuit, et que l'on conserve d'ailleurs les dénominations du Mémoire imprimé dans les *Annales de Chimie et de Physique*, tome XX, pages 398 et suivantes, on aura, pour l'action mutuelle des deux élémens

$$-ii'r^{1-n-k}\,d(r^k\,d'r)\ \text{(page 413)};$$

d'ailleurs

$$\cos\beta = -\frac{dr}{ds'}\quad\text{(page 408)},$$

d'où

$$d'r = \frac{dr}{ds'}\,ds' = -ds'\cos\beta,$$

ce qui change l'expression de cette action en

$$ii'\,ds'\,r^{1-n-k}\,d(r^k\cos\beta);$$

car ds', qui représente l'élément sur lequel agit le circuit fermé, est constant par rapport à la caractéristique d.

Pour avoir la force tangentielle élémentaire, il faut multiplier cette valeur par $\cos\beta$, ce qui donne

$$ii'\,ds'\,r^{1-n-k}\cos\beta\,d(r^k\cos\beta),$$

qu'on peut mettre sous la forme

$\frac{1}{2}ii'\,ds'\,r^{1-n-2k}\,d(r^k\cos\beta)^2$.

Intégrant par partie, on en tire, pour la force tangentielle totale

$$\tfrac{1}{2}ii'\,ds'\left\{r^{1-n-2k}(r^k\cos\beta)^2-(1-n-2k)\int r^{-n-2k}(r^k\cos\beta)^2\,dr\right\},$$

ou

$$\tfrac{1}{2}ii'\,ds'\left\{\frac{\cos^2\beta}{r^{n-1}}-(1-n-2k)\int\frac{\cos^2\beta}{r^n}\,dr\right\}.$$

Comme le circuit est fermé, r et β prendront les mêmes valeurs aux limites, ainsi la première partie

$$\frac{\cos^2\beta}{r^{n-1}}$$

disparaîtra. Mais il n'en sera pas de même de la seconde, qu'on ne peut calculer qu'après avoir remplacé l'une des variables r et β par sa valeur en fonction de l'autre tirée des équations du circuit, en sorte qu'on peut choisir ces équations de manière que l'intégrale

$$\int\frac{\cos^2\beta}{r^n}\,dr$$

ne se réduise pas à zéro entre les limites. Pour que la force tangentielle totale s'évanouisse, il faut donc que le coefficient de cette intégrale soit nul ; ce qui donne la relation cherchée $2k+n-1=0$.

On peut se faire une idée plus juste de l'intégrale

$$\int\frac{\cos^2\beta}{r^n}\,dr,$$

en concevant, autour du milieu de l'élément ds pris pour centre, une infinité de surfaces sphériques qui divisent le circuit fermé en arcs infiniment petits, de manière que les deux surfaces sphériques extrêmes

le touchent aux deux points de ce circuit qui sont, l'un le plus éloigné, et l'autre le plus proche du milieu de l'élément; alors on pourra considérer le circuit fermé comme composé de deux branches terminées à ces deux points, et divisées toutes deux en un même nombre d'arcs infiniment petits, de manière qu'à chacun des arcs d'une branche réponde un arc de l'autre branche compris entre les deux mêmes surfaces sphériques consécutives : pour deux arcs correspondans on a alors la même valeur de r, et les valeurs de dr sont égales, mais de signes contraires, puisque le courant ne peut aller en s'éloignant de l'élément ds' dans une des branches sans aller, en s'en approchant, dans l'autre. On voit par là pourquoi l'intégrale $\int f(r)\,dr$ est toujours nulle quand on la prend dans toute l'étendue du circuit fermé, puisque cette intégrale se compose alors d'élémens qui sont, deux à deux, de même valeur, mais de signes contraires.

Il en serait de même de $\int f(r)\cos^2\beta\,dr$, si $\cos^2\beta$ avait la même valeur pour deux élémens correspondans quelconques, par exemple, si ces deux élémens étaient toujours situés symétriquement des deux côtés d'un plan élevé perpendiculairement sur le milieu de ds'; mais si, au contraire, dans une des deux branches la valeur absolue de $\cos\beta$ pour chaque élément est plus grande que pour son correspondant, $\int f(r)\cos^2\beta\,dr$ se composera de deux séries de termes, dont l'une ne contiendra que des termes positifs et l'autre des termes négatifs, de manière que chacun des premiers ait une valeur absolue plus grande ou plus

petite que celle du terme négatif qui lui correspond dans l'autre série. Dès-lors cette intégrale ne pourra jamais être nulle, et il faudra, pour que la force tangentielle le soit conformément à l'expérience, qu'on ait $2k+n-1=0$.

Je vais maintenant déduire de la formule qui représente l'action mutuelle de deux élémens de courans électriques diverses conséquences relatives à celle qu'exercent, dans différens cas, des conducteurs rectilignes ou circulaires; je ferai dans cette formule $n=2$, et par conséquent $k=-\frac{1}{2}$, puisque cette valeur de n est celle qui a lieu dans l'action qu'exerce l'électricité en mouvement.

En partant de l'expression

$$\tfrac{1}{2}ii'\,\mathrm{d}s'\left(\frac{\sin\beta\cos\beta}{r}-\int\frac{\mathrm{d}\beta}{r}\right),$$

que j'ai donnée en 1822 dans mon *Recueil d'Observations électro-dynamiques*, page 331, pour la valeur de la composante perpendiculaire à l'élément $\mathrm{d}s'$, on peut calculer très-facilement l'action mutuelle que deux conducteurs rectilignes et parallèles exercent l'un sur l'autre perpendiculairement à leurs directions; car, en nommant a la distance de ces deux conducteurs, on a d'abord

$$r=\frac{a}{\sin\beta},$$

ce qui donne, pour la valeur de l'intégrale précédente entre les limites β', β'',

$$\tfrac{1}{2}ii'\,\frac{\mathrm{d}s'}{a}(\cos\beta''\sin^2\beta''+\cos\beta''-\cos\beta'\sin^2\beta'-\cos\beta'),$$

ensuite à chaque limite, en y représentant les valeurs de s par b' et b'',

$$s'=b''-a\cot\beta''=b'-a\cot\beta',\ \mathrm{d}s'=\frac{a\,\mathrm{d}\beta''}{\sin^2\beta''}=\frac{a\,\mathrm{d}\beta'}{\sin^2\beta'},$$

En substituant ces valeurs et intégrant de nouveau entre les limites $\beta_{,}'$, $\beta_{,,}'$ et $\beta_{,}''$, $\beta_{,,}''$, on a, pour la valeur de la force cherchée,

$$\tfrac{1}{2} ii' \left(\sin \beta_{,,}'' - \sin \beta_{,}'' - \sin \beta_{,,}' + \sin \beta_{,}' - \frac{1}{\sin \beta_{,,}''} + \frac{1}{\sin \beta_{,}''} + \frac{1}{\sin \beta_{,,}'} - \frac{1}{\sin \beta_{,}'} \right),$$

ou

$$\tfrac{1}{2} ii' \left(\frac{a}{r_{,,}''} - \frac{a}{r_{,}''} - \frac{a}{r_{,,}'} + \frac{a}{r_{,}'} + \frac{r_{,}'' + r_{,,}' - r_{,,}'' - r_{,}'}{a} \right).$$

Si les deux conducteurs sont de même longueur et perpendiculaires aux droites qui en joignent deux à deux les extrémités d'un même côté, on a

$$r_{,}' = r_{,,}'' = a, \text{ et } r_{,,}' = r_{,}'' = c,$$

lorsqu'on représente par c la diagonale du rectangle que forment ces deux droites et les directions des deux courans : l'expression précédente devient alors

$$ii' \left(\frac{c}{a} - \frac{a}{c} \right) = \frac{ii' l^2}{ac},$$

en nommant l la longueur des conducteurs, et quand ce rectangle devient un carré, on a $\frac{ii'}{\sqrt{2}}$ pour la valeur de la force; enfin, si l'on suppose l'un des conducteurs indéfini dans les deux sens, et que l soit la longueur de l'autre, les termes où $r_{,}'$, $r_{,,}'$, $r_{,}''$, $r_{,,}''$ se trouvent au dénominateur disparaîtront, on aura

$$r_{,,}' + r_{,}'' - r_{,,}'' - r_{,}' = 2l,$$

et l'expression de la force deviendra

$$\frac{ii'l}{a},$$

qui se réduit à ii' quand la longueur l est égale à la distance a.

Quant à la force exercée par l'élément ds dans la direction de l'élément ds', j'ai donné, dans le même article de mon *Recueil d'Observations électro-dynamiques*, pour la représenter, cette valeur

$$\tfrac{1}{2}ii'\,ds'\,d\,\frac{\cos^2\beta}{r};$$

l'action qu'une portion quelconque du circuit voltaïque à laquelle appartient l'élément ds exerce dans la même direction sur ds' est donc égale à

$$\tfrac{1}{2}ii'\,ds'\left[\frac{\cos^2\beta''}{r''}-\frac{\cos^2\beta'}{r'}\right],$$

il suffit de changer le signe de cette expression, qui est indépendante de la forme de la portion de conducteur voltaïque, et dépend seulement de la situation de ses deux extrémités à l'égard de l'élément ds', pour avoir la force avec laquelle la même portion de conducteur est tirée en sens contraire par cet élément ds' suivant une droite parallèle à sa direction, d'où il suit que s'il fait partie d'un conducteur rectiligne fixe, on aura la valeur de la force qu'exerce tout le conducteur pour faire marcher la portion dont nous parlons parallèlement à ce conducteur, en intégrant entre les limites marquées par ses deux extrémités la valeur que nous venons de trouver pour la force tangentielle de l'élément ds'.

Si l'on nomme a' et a'' les perpendiculaires abaissées

des deux extrémités de la portion de conducteur que l'on considère comme mobile, sur le conducteur rectiligne dont il s'agit de calculer l'action parallèlement à sa direction, on aura

$$r'' = \frac{a''}{\sin\beta''}, \quad r' = \frac{a'}{\sin\beta'},$$

$$ds' = -\frac{d'r''}{\cos\beta''} = \frac{a''\,d\beta''}{\sin^2\beta''} = -\frac{d'r'}{\cos\beta'} = \frac{a'\,d\beta'}{\sin^2\beta'},$$

et par conséquent,

$$\frac{ds'}{r''} = \frac{d\beta''}{\sin\beta''}, \quad \frac{ds'}{r'} = \frac{d\beta'}{\sin\beta'};$$

d'où il est aisé de conclure que l'intégrale cherchée est

$$-\tfrac{1}{2}\,ii'\int\left[\frac{\cos^2\beta''\,d\beta''}{\sin\beta''} - \frac{\cos^2\beta'\,d\beta'}{\sin\beta'}\right]$$

$$= -\tfrac{1}{2}\,ii'\left[\mathrm{l}\,\frac{\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\beta''}{\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\beta'} + \cos\beta'' - \cos\beta' + C\right].$$

Il faudra prendre cette intégrale entre les limites déterminées par les deux extrémités du conducteur rectiligne; en nommant $\beta_{,}'$, $\beta_{,}''$, $\beta_{,,}'$, $\beta_{,,}''$ les valeurs de β' et de β'' relatives à ces limites, on a sur-le-champ celle de la force exercée par le conducteur rectiligne, et cette dernière valeur ne dépend évidemment que des quatre angles $\beta_{,}'$, $\beta_{,}''$, $\beta_{,,}'$, $\beta_{,,}''$.

Lorsqu'on veut la valeur de cette force pour le cas où le conducteur rectiligne s'étend indéfiniment dans les deux sens, il faut faire $\beta_{,}' = \beta_{,}'' = 0$, et $\beta_{,,}' = \beta_{,,}'' = \pi$: il semble, au premier coup-d'œil, qu'elle devient alors nulle, ce qui serait contraire à l'expérience; mais on

voit aisément que la partie de l'intégrale où entrent les cosinus de ces quatre angles est la seule qui s'évanouisse dans ce cas, et que le reste de l'intégrale

$$\tfrac{1}{2} ii'' \left[1 \frac{\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\beta_{,}''}{\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\beta_{,}'} - 1 \frac{\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\beta_{,,}''}{\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\beta_{,,}'} \right]$$

$$= \tfrac{1}{2} ii'' \, 1 \frac{\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\beta_{,}'' \cot \tfrac{1}{2}\beta_{,,}''}{\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\beta_{,}' \cot \tfrac{1}{2}\beta_{,,}'}$$

devient

$$\tfrac{1}{2} ii'' \, 1 \frac{\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\beta_{,}''}{\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\beta_{,}'} = ii'' \, 1 \frac{\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\beta_{,}''}{\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\beta_{,}'} = ii' \, 1 \frac{a''}{a'}.$$

Cette valeur montre que la force cherchée ne dépend alors que du rapport des deux perpendiculaires a' et a'' abaissées sur le conducteur rectiligne indéfini des deux extrémités de la portion de conducteur sur lequel il agit ; qu'elle est encore indépendante de la forme de cette portion, et ne devient nulle, comme cela doit être, que quand les deux perpendiculaires sont égales entre elles.

Pour avoir la distance de cette force au conducteur rectiligne, dont la direction est parallèle à la sienne, il faut multiplier chacune des forces élémentaires dont elle se compose par sa distance au conducteur, et intégrer le résultat relativement aux mêmes limites ; on aura ainsi le moment qu'il faudra diviser par la force pour avoir la distance cherchée.

On trouve aisément, d'après les valeurs ci-dessus, que le moment élémentaire a pour valeur

$$\tfrac{1}{2} ii'' \, \mathrm{d}s' \, r \sin \beta \, \mathrm{d} \frac{\cos^2 \beta}{r}.$$

Cette valeur ne peut s'intégrer que quand on y a substitué à l'une des variables r ou β sa valeur en fonction de l'autre, tirée des équations qui déterminent la forme de la portion mobile de conducteur ; elle devient très-simple quand cette portion se trouve sur une droite élevée par un point quelconque du conducteur rectiligne que l'on considère comme fixe perpendiculairement à sa direction, parce qu'en prenant ce point pour l'origine des s', on a

$$r = -\frac{s'}{\cos\beta},$$

et puisque s' est une constante relativement à la différentielle

$$\mathrm{d}\,\frac{\cos^2\beta}{r};$$

la valeur du moment élémentaire devient

$$\tfrac{1}{2} i i' \,\mathrm{d}s' \,\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\,\mathrm{d}(\cos^3\beta) = -\tfrac{3}{2} i i' \,\mathrm{d}s' \sin^2\beta\cos\beta\,\mathrm{d}\beta,$$

dont l'intégrale entre les limites β'' et β' est

$$-\tfrac{1}{2} i i' \,\mathrm{d}s' \,[\sin^3\beta'' - \sin^3\beta'].$$

En remplaçant $\mathrm{d}s'$ par les valeurs de cette différentielle trouvées plus haut, et en intégrant de nouveau, on a entre les limites déterminées par les deux extrémités du conducteur rectiligne,

$$\tfrac{1}{2} i i' \,[a''(\cos\beta_{,,}'' - \cos\beta_{,}'') - a'(\cos\beta_{,,}' - \cos\beta_{,}')].$$

Si l'on suppose que ce conducteur s'étende indéfiniment dans les deux sens, il faudra donner à $\beta_{,}'$, $\beta_{,}''$, $\beta_{,,}'$, $\beta_{,,}''$, les valeurs que nous leur avons déjà assignées dans ce cas, et on aura

$$-i i' \,(a'' - a')$$

pour la valeur du moment de rotation qui sera par conséquent proportionnel à la longueur $a'' - a'$ du conducteur mobile, et ne changera point tant que cette longueur restera la même, quelles que soient d'ailleurs les distances des extrémités de ce dernier conducteur à celui qui est considéré comme fixe.

Il est aisé de voir que cette valeur est celle du moment de rotation que le conducteur fixe imprime à la portion d'un autre conducteur rectiligne située sur une droite qui coupe à angles droits la direction du premier, pour la faire tourner autour du point d'intersection des directions des deux conducteurs. Si l'on abaisse, du sommet de l'angle droit formé, à leur intersection, par les directions des deux courans, des perpendiculaires sur les quatre droites qui joignent deux à deux les extrémités de ces courans, et si l'on représente ces perpendiculaires par $p_{,}'$, $p_{,}''$, $p_{,,}'$, $p_{,,}''$, on aura

$$p_{,}' = \pm a' \cos \beta_{,}', \; p_{,}'' = \pm a'' \cos \beta_{,}'', \; p_{,,}' = \pm a' \cos \beta_{,,}',$$
$$p_{,,}'' = \pm a'' \cos \beta_{,,}'',$$

suivant que le courant du conducteur, qu'on a considéré comme fixe, va en s'approchant ou en s'éloignant du point où la direction de ce conducteur rencontre celle de l'autre, et la valeur du moment de rotation, avec lequel il tend à faire tourner autour de ce point le conducteur mobile, devient par conséquent

$$\pm \tfrac{1}{2} ii' (p_{,,}'' - p_{,}'' - p_{,,}' + p_{,}'),$$

c'est-à-dire, précisément la même que s'il était produit par quatre forces égales à $\frac{1}{2} ii'$, dont deux seraient attractives et dirigées suivant les droites qui joignent les extré-

mités de même nom des deux conducteurs, et les deux autres répulsives et agissant suivant les droites qui joignent les extrémités de noms différens des mêmes conducteurs.

Si les courans s'étendent jusqu'au point d'intersection des directions des deux droites qu'ils parcourent, trois de ces quatre perpendiculaires seront nulles, et le moment de rotation sera simplement proportionnel à la hauteur du triangle rectangle dont ces droites seront les côtés, en sorte que si l'on suppose que leurs longueurs deviennent plus grandes ou plus petites dans un même rapport, le moment de rotation augmentera ou diminuera aussi dans ce même rapport.

Le résultat que nous venons d'obtenir n'est qu'un cas particulier de la valeur générale du moment de rotation qui résulte de l'action mutuelle de deux conducteurs rectilignes $L'L''$, $L_{,}L_{,,}$ (fig. 4), situés dans un même plan, pour se faire tourner mutuellement autour du point d'intersection O de leurs directions : afin de calculer plus facilement la valeur de ce moment, que nous désignerons par M, nous mettrons celle de l'action mutuelle des deux élémens ds, ds' sous cette forme

$$\tfrac{1}{2} ii' \frac{ds'}{\cos\beta} \, d \, \frac{\cos^2\beta}{r},$$

qui résulte immédiatement de ce que la composante de cette action, dans le sens de l'élément ds', devient

$$\tfrac{1}{2} ii' \, ds' \, d \, \frac{\cos^2\beta}{r},$$

comme nous venons de le voir, quand on y fait $k = -\frac{1}{2}$ et $n = 2$.

En prenant le point d'intersection des directions des deux conducteurs pour l'origine des distances $OM = s$, $OM' = s'$, nous aurons $s' \sin \beta$ pour la perpendiculaire OP abaissée de ce point sur la droite qui joint les milieux des deux élémens, et la valeur du moment élémentaire de rotation sera

$$\frac{d^2 M}{ds\, ds'} ds\, ds' = \tfrac{1}{2} ii' s'\, ds'\, \text{tang}\, \beta\, d \frac{\cos^2 \beta}{r},$$

d'où l'on conclut, en intégrant par partie,

$$\frac{dM}{ds'} ds' = \tfrac{1}{2} ii' s'\, ds' \left(\frac{\sin \beta \cos \beta}{r} - \int \frac{d\beta}{r} \right).$$

Mais d'après la manière dont les angles ont été pris dans le calcul de la formule qui représente l'action mutuelle de deux élémens de conducteurs voltaïques, l'angle β est extérieur au triangle OMM'; et en nommant ε l'angle MOM' compris entre les directions des deux courans, le troisième angle OMM', égal à α, l'est aussi à $\beta - \varepsilon$, ce qui donne

$$r = \frac{s' \sin \varepsilon}{\sin (\beta - \varepsilon)},$$

on a donc

$$\frac{dM}{ds'} ds' = \tfrac{1}{2} ii' \frac{ds'}{\sin \varepsilon} [\cos \beta \sin \beta \sin (\beta - \varepsilon) + \cos (\beta - \varepsilon) + C].$$

En remplaçant dans cette valeur $\cos (\beta - \varepsilon)$ par

$$\cos^2 \beta \cos (\beta - \varepsilon) + \sin^2 \beta \cos (\beta - \varepsilon),$$

on voit aisément qu'elle se réduit à

$$\frac{dM}{ds'} ds' = \tfrac{1}{2} ii' \frac{ds'}{\sin \varepsilon} [\cos \varepsilon \cos \beta + \sin^2 \beta \cos (\beta - \varepsilon) + C],$$

qu'il faut prendre entre les limites β' et β''; on a ainsi

la différence de deux fonctions de même forme, l'une de β'', l'autre de β', qu'il s'agit d'intégrer de nouveau pour avoir le moment de rotation cherché : il suffit de faire cette seconde intégration sur une seule de ces deux quantités : soit donc a'' la distance OL'' qui répond à β'', on aura

$$s' = \frac{a'' \sin(\beta'' - \varepsilon)}{\sin \beta''} = a'' \cos\varepsilon - a'' \sin\varepsilon \cot\beta'', \; ds' = \frac{a'' \sin\varepsilon \, d\beta''}{\sin^2 \beta''} ;$$

et la quantité que nous nous proposons d'abord d'intégrer sera

$$\tfrac{1}{2} a'' i i' \left\{ \frac{\cos\varepsilon \cos\beta'' \, d\beta''}{\sin^2 \beta''} + \cos(\beta'' - \varepsilon) \, d\beta \right\},$$

dont l'intégrale prise entre les limites $\beta''_{,}$ et $\beta''_{,,}$ est

$$\tfrac{1}{2} a'' i i' \left\{ \sin(\beta''_{,,} - \varepsilon) - \sin(\beta''_{,} - \varepsilon) - \frac{\cos\varepsilon}{\sin \beta''_{,,}} + \frac{\cos\varepsilon}{\sin \beta''_{,}} \right\}.$$

En désignant par $p''_{,,}$ et $p''_{,}$, les perpendiculaires abaissées du point O sur les distances $L'' L_{,,} = r''_{,,}$, $L'' L_{,} = r''_{,}$, on a évidemment

$$a'' \sin(\beta''_{,,} - \varepsilon) = p''_{,,}, \; a'' \sin \beta''_{,} = p''_{,}, \; \frac{a''}{\sin \beta''_{,,}} = \frac{r''_{,,}}{\sin\varepsilon}, \; \frac{a''}{\sin \beta''_{,}} = \frac{r''_{,}}{\sin\varepsilon},$$

et l'intégrale précédente devient

$$\tfrac{1}{2} i i' \left[p''_{,,} - p''_{,} - (r''_{,,} - r''_{,}) \cot\varepsilon \right].$$

Si l'on fait attention qu'en désignant la distance OL' par a', on a aussi

$$s' = \frac{a' \sin(\beta' - \varepsilon)}{\sin \beta'} = a' \cos\varepsilon - a' \sin\varepsilon \cot\beta', \; ds' = \frac{a' \sin\varepsilon}{\sin^2 \beta'},$$

on voit aisément que l'intégrale de l'autre quantité se forme de celle que nous venons d'obtenir, en y changeant $p''_{,,}$, $p''_{,}$, $r''_{,,}$, $r''_{,}$ en $p'_{,,}$, $p'_{,}$, $r'_{,,}$, $r'_{,}$, ce qui donne,

pour la valeur du moment de rotation qui est la différence des deux intégrales

$$\tfrac{1}{2} ii' [p_{,,}'' - p_{,}'' - p_{,,}' + p_{,}' - (r_{,,}'' - r_{,}'' - r_{,,}' + r_{,}') \cot \varepsilon].$$

Cette valeur se réduit à celle que nous avons trouvée plus haut, dans le cas où l'angle ε est droit, parce qu'alors $\cot \varepsilon = 0$.

Si l'on suppose que les deux courans partent du point O, et que leurs longueurs OL'', $OL_{,,}$ (fig. 5) soient représentées respectivement par a et b, la perpendiculaire OP par p, et la distance $L'' L_{,,}$ par r, on aura

$$\tfrac{1}{2} ii' [p + (a + b - r) \cot \varepsilon],$$

pour la valeur que prend, dans ce cas, le moment de rotation.

La quantité $a + b - r$, excès de la somme de deux côtés d'un triangle sur le troisième, est toujours positive, d'où il suit que le moment de rotation est plus grand que la valeur $\tfrac{1}{2} ii' p$ qu'il prend quand l'angle ε des deux conducteurs est droit, tant que $\cot \varepsilon$ est positif, c'est-à-dire, tant que cet angle est aigu ; mais il devient plus petit quand le même angle est obtus, parce qu'alors $\cot \varepsilon$ est négatif. Il est évident d'ailleurs que sa valeur est d'autant plus grande que l'angle ε est plus petit, et qu'elle croît à l'infini comme $\cot \varepsilon$ à mesure que ε s'approche de zéro ; mais il est bon de montrer qu'elle reste toujours positive, quelque voisin que cet angle soit de deux droits.

Il suffit pour cela de faire attention qu'en nommant α l'angle du triangle $OL'' L_{,,}$ compris entre les côtés a et r, et β celui qui l'est entre les côtés b et r, on

$a \cot \varepsilon = -\cot(\alpha+\beta)$, $p = a \sin \alpha = b \sin \beta$, $r = a \cos \alpha + b \cos \beta$, et par conséquent

$$a + b - r = a(1 - \cos\alpha) + b(1 - \cos\beta)$$
$$= p \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha + p \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\beta,$$

d'où

$$\tfrac{1}{2} i i' [p + (a+b-r)\cot\varepsilon] = \tfrac{1}{2} i i' p \left(1 - \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha + \operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta}{\operatorname{tang}(\alpha+\beta)}\right),$$

valeur qui reste toujours positive, quelque petits que soient les angles α et β, puisque tang $(\alpha+\beta)$, pour des angles inférieurs à $\frac{\pi}{4}$, est toujours plus grand que tang α + tang β, et à plus forte raison plus que tang $\frac{1}{2}\alpha$ + tang $\frac{1}{2}\beta$. Cette valeur tend évidemment vers la limite $\frac{1}{4} i i' p$ à mesure que les angles α et β s'approchent de zéro ; elle s'évanouit avec p quand ces angles deviennent nuls.

En partant de cette expression du moment de rotation résultant de l'action mutuelle de deux conducteurs rectilignes situés dans un même plan, autour du point d'intersection de leur direction, et du fait général, constaté de nouveau par l'expérience décrite au commencement de ce Mémoire, de la nullité d'action d'un conducteur plié en arc de cercle sur une portion de circuit qui a ses deux extrémités dans la perpendiculaire élevée au centre de cet arc sur le plan où il est tracé, j'ai imaginé un instrument fondé sur le même principe que celui que j'ai présenté, il y a environ deux ans, à l'Académie des Sciences et décrit dans mon *Recueil d'Observations électro-dynamiques*, p. 224 et suiv. : il est destiné de même à déterminer, par le nombre des oscillations d'un conducteur mobile, la valeur de l'action qu'exerce sur

lui un conducteur fixe ; mais il n'a pas l'inconvénient que présentait le premier, de donner la mesure expérimentale de cette action dans un cas où l'on ne peut la déterminer, à l'aide de ma formule, que par des calculs extrêmement compliqués. Je me propose de publier bientôt la description de ce nouvel instrument.

Quand le point d'intersection des conducteurs OL'', $L_{,}L_{,,}$ (fig. 6) se trouve à l'une des extrémités du premier et au milieu du second, on obtient le moment de rotation résultant de l'action mutuelle de ces deux conducteurs en ajoutant ceux qui se rapportent à chacun des angles $L_{,}OL''$, $L_{,,}OL''$, dont les deux cotangentes sont égales et de signes contraires, en sorte qu'en désignant les distances $L_{,,}L''$ et $L_{,}L''$ par r et r', et les perpendiculaires OP, OP', par p et p', on a pour ce moment

$$\tfrac{1}{2}ii'[p+p'+(r'-r)\cot\varepsilon].$$

Supposons en outre que la longueur $OL''=a$ du conducteur qui a une de ses extrémités en O soit égale à la moitié $OL_{,}$ ou $OL_{,,}$ de l'autre, et nommons θ la moitié POL'' ou $POL_{,,}$ de l'angle $L_{,,}OL''=\varepsilon$, nous trouverons

$$p=a\cos\theta,\ p'=a\sin\theta,\ r=2a\sin\theta,\ r'=2a\cos\theta,$$

$$\cot\varepsilon=\frac{1-\operatorname{tang}^2\theta}{2\operatorname{tang}\theta}=-\frac{1-\cot^2\theta}{2\cot\theta}:$$

la valeur du moment de rotation est donc alors

$$\tfrac{1}{2}aii'\left\{\cos\theta-\sin\theta\frac{1-\operatorname{tang}^2\theta}{\operatorname{tang}\theta}+\sin\theta-\cos\theta\frac{1-\cot^2\theta}{\cot\theta}\right\},$$

ou

$$\tfrac{1}{2}aii'[\cos\theta\operatorname{tang}^2\theta+\sin\theta\cot^2\theta]=\tfrac{1}{2}aii'[\sin\theta\operatorname{tang}\theta+\cos\theta\cot\theta].$$

Il suffit de doubler cette expression, en supprimant le dénominateur 2, pour avoir celui qui est produit par l'action de deux conducteurs $L'L''$, $L_{,}L_{,,}$ de même longueur, et dont les milieux sont au point O autour duquel l'un d'eux est supposé mobile.

Dans l'instrument dont j'ai parlé tout-à-l'heure, deux conducteurs rectilignes de même longueur sont mobiles autour de leurs milieux; de chacun de ces milieux, assez éloignés pour qu'il n'y ait pas entre ces conducteurs d'action mutuelle sensible, partent deux autres conducteurs rectilignes, dont la longueur est moitié moindre; ceux-ci sont fixes et forment entre eux un angle qu'on peut faire varier à volonté; un même courant électrique traverse les six conducteurs de manière qu'il aille partout en sens contraires dans chaque conducteur fixe et dans la partie du conducteur mobile correspondant qui en est la plus voisine, afin que celui-ci s'arrête en équilibre stable dans la direction perpendiculaire à la droite qui divise en deux parties égales l'angle des deux conducteurs fixes dont il éprouve l'action. Comme c'est ce dernier angle qui est donné immédiatement sur l'arc gradué qui est attaché à l'un de ces conducteurs fixes, il est bon d'introduire sa moitié, que nous représenterons par η, au lieu de θ dans l'expression du moment de rotation

$$M = \tfrac{1}{2} a i i' (\sin\theta \tan\theta + \cos\theta \cot\theta)$$

que chaque conducteur fixe imprime au conducteur mobile sur lequel il agit : si l'on fait attention que

$$\sin^3\theta + \cos^3\theta = (\sin\theta + \cos\theta)(1 - \sin\theta\cos\theta),$$

et que

$$\theta = \tfrac{1}{2}\varepsilon = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \eta\right)$$

donne

$\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin\varepsilon = \frac{1}{2}\cos\eta$ et $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\cos\frac{1}{2}\eta$,

on aura

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}}\, aii'\cos\tfrac{1}{2}\eta\left(\frac{2}{\cos\eta} - 1\right).$$

Lorsqu'on écarte infiniment peu le conducteur mobile de la situation d'équilibre, l'angle θ devient $\theta + d\theta$ relativement à l'un des conducteurs fixes, et $\theta - d\theta$ relativement à l'autre, en sorte que la différence des deux momens, qui était nulle dans cette situation, devient, après le déplacement,

$$2\frac{dM}{d\theta}d\theta = -aii'(\cos\theta - \sin\theta)\left(\frac{1}{\sin^2\theta\cos^2\theta} + \frac{1}{\sin\theta\cos\theta} + 1\right)d\theta.$$

Cette valeur est toujours négative quand on prend, comme nous le supposons ici, l'angle ε double de θ du côté où cet angle est aigu, parce que, d'après la direction opposée des courans électriques dans les deux côtés de cet angle qui exige que le moment M tende à l'augmenter, le moment $2\frac{dM}{d\theta}d\theta$ tend à diminuer cet angle du côté où $d\theta$ est positif, et à l'augmenter du côté où la même différentielle est négative, c'est-à-dire, à ramener le conducteur mobile à la position d'équilibre, ce qu'il était d'ailleurs aisé de voir *à priori*.

En introduisant, dans la valeur que nous venons d'obtenir, l'angle η, au lieu de θ, on trouve

$$2\frac{dM}{d\theta}d\theta = -aii'\sqrt{2}\sin\tfrac{1}{2}\eta\left(\frac{4}{\cos^2\eta} + \frac{2}{\cos\eta} + 1\right)d\theta.$$

C'est ce moment qu'il faut mesurer, soit par la torsion d'un fil, soit par le nombre des oscillations que font les

deux conducteurs mobiles, dans un temps donné, au moyen d'observations faites simultanément (1) sur ces conducteurs, lorsqu'on veut vérifier les résultats déduits de ma formule en les comparant à ceux de l'expérience.

Si le conducteur dont la longueur a été désignée par b s'étendait à l'infini, l'autre ayant toujours pour longueur $2a$ et son milieu situé sur la direction du premier, on aurait

$$p=p'=a\sin\varepsilon,\quad r'-r=2a\cos\varepsilon,$$

et la valeur du moment de rotation

$$\tfrac{1}{2}aii'[p+p'+(r'-r)\cot\varepsilon]$$

deviendrait

$$aii'\left[\sin\varepsilon+\frac{\cos^2\varepsilon}{\sin\varepsilon}\right]=\frac{aii'}{\sin\varepsilon}.$$

Lorsque le conducteur fixe est indéfini dans les deux sens, il faut doubler cette valeur, et l'on a

$$\frac{2aii'}{\sin\varepsilon}$$

pour le moment de rotation qu'il imprime au conducteur mobile $2a$; ce moment est donc réciproquement proportionnel au sinus de l'angle ε formé par les directions des deux conducteurs.

Nous venons de trouver

$$2\frac{dM}{d\theta}d\theta=-aii'(\cos\theta-\sin\theta)\left(\frac{1}{\sin^2\theta\cos^2\theta}+\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}+1\right)d\theta$$

---

(1) On évite ainsi complètement les inexactitudes produites par les variations de l'énergie de la pile qui altèrent nécessairement les résultats déduits des expériences, quand on compare entre elles des mesures déterminées par des observations faites successivement. On peut aussi mesurer directement le moment M par la torsion d'un fil.

pour le moment de rotation différentiel en vertu duquel un conducteur rectiligne $L'L_{\prime\prime}$, dont la longueur est $2a$, mobile autour de son milieu, oscille de part et d'autre de sa situation d'équilibre, quand il est soumis à l'action de deux conducteurs fixes OL, $L''O$, qui ont chacun une de leurs extrémités à ce milieu, et dont la longueur est a. Dans l'instrument que j'ai imaginé pour vérifier ce résultat de ma formule, ce ne sont pas seulement ces deux conducteurs qui agissent sur celui qui est mobile, mais encore la portion circulaire LNL'' du circuit voltaïque qui joint les deux autres extrémités L, L'' des conducteurs fixes : comme l'action qui résulte de cette portion est dirigée en sens contraire, on a un moment dont le signe est opposé à celui du moment dont nous venons d'obtenir la valeur; il doit être ajouté au premier, et, ce qui est bien remarquable, le moment total prend une forme beaucoup plus simple. En effet, en nommant M' le moment de rotation produit par cet arc, celui qu'il faut ajouter à

$$2\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\theta}\mathrm{d}\theta$$

est évidemment

$$2\frac{\mathrm{d}M'}{\mathrm{d}\theta}\mathrm{d}\theta;$$

comme le rayon de l'arc s' est égal à a, on a $s' = 2a\theta + C$, d'où

$$\mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}s'}{2a},$$

et, par conséquent,

$$2\frac{\mathrm{d}M'}{\mathrm{d}\theta}\mathrm{d}\theta = 4a\frac{\mathrm{d}M'}{\mathrm{d}s'}\mathrm{d}\theta.$$

Mais la force tangentielle qui a lieu dans la direction LT' de l'élément $Ll = \mathrm{d}s'$ étant

$$\tfrac{1}{2} ii' \, ds' \, d\frac{\cos^2\beta}{r},$$

et son moment pour faire tourner cet élément autour de son centre étant égal et de signe contraire à celui dont nous cherchons la valeur, on a

$$\frac{d^2 M'}{ds\,ds'} ds\,ds' = -\tfrac{1}{2} aii' \, ds' \, d\frac{\cos^2\beta}{r},$$

d'où

$$\frac{dM'}{ds'} ds' = -\tfrac{1}{2} aii' \left(\frac{\cos^2\beta_{,,}}{r_{,,}} - \frac{\cos^2\beta_{,}}{r_{,}} \right) ds'.$$

En faisant attention qu'il faut intégrer dans le même sens relativement à la direction du courant que pour les conducteurs rectilignes fixes, on trouve

$$\cos\beta_{,} = -\cos\theta, \; r_{,} = 2a\sin\theta, \; \cos\beta_{,,} = \sin\theta, \; r_{,,} = 2a\cos\theta,$$

ainsi

$$\frac{dM'}{ds'} = \tfrac{1}{4} ii' \left(\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} \right) = \tfrac{1}{4} ii' (\cos\theta - \sin\theta) \left(\frac{1}{\sin\theta\cos\theta} + 1 \right),$$

et

$$4a \frac{dM'}{ds'} d\theta = a\, ii' (\cos\theta - \sin\theta) \left(\frac{1}{\sin\theta\cos\theta} + 1 \right) d\theta.$$

En réunissant ce moment avec celui que nous avons nommé

$$2 \frac{dM}{ds'} d\theta,$$

il vient

$$-\frac{a\, ii' (\cos\theta - \sin\theta)}{\sin^2\theta\cos^2\theta} d\theta = -\frac{4 a ii' \sqrt{2} \sin\frac{1}{2}\eta}{\cos^2\eta} d\theta,$$

parce qu'outre l'équation $\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\cos\eta$ que nous avons déduite (page 24 de ce Mémoire) de la valeur de θ,

$$\theta = \tfrac{1}{2}\varepsilon = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \eta\right),$$

on tire aussi de cette même valeur

$$\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\,\sin\tfrac{1}{2}\eta.$$

L'action qui fait osciller le conducteur mobile est donc proportionnelle au sinus du quart de l'angle compris entre les directions des deux conducteurs rectilignes fixes, divisé par le carré du cosinus de la moitié du même angle; elle devient nulle avec cet angle comme cela doit être, et infinie quand ils sont dirigés suivant une même droite, parce qu'alors

$$\eta = \frac{\pi}{2}.$$

Dans l'instrument destiné à la mesure de ces oscillations, les deux extrémités du conducteur mobile sont aussi jointes par un conducteur formant une demi-circonférence; mais on ne doit tenir compte que de l'action exercée sur sa portion rectiligne, puisque le circuit formé des deux conducteurs rectilignes fixes et de l'arc qui en joint les extrémités est un circuit fermé qui ne peut agir sur la portion circulaire du conducteur mobile.

La valeur que nous venons de trouver

$$\frac{\mathrm{d}M'}{\mathrm{d}s'}\,\mathrm{d}s' = -\tfrac{1}{2}\,a\,i\,i'\left\{\frac{\cos^2\beta_{,,}}{r_{,,}} - \frac{\cos^2\beta_{,}}{r_{,}}\right\}\mathrm{d}s'$$

exprime, en général, l'action imprimée par le petit arc ds' à un conducteur mobile d'une forme quelconque dont les extrémités seraient désignées par $L_{,}$ et $L_{,,}$, pour le faire tourner autour d'un axe élevé par le centre de cet arc perpendiculairement à son plan; cette action est donc

indépendante de la forme du conducteur, et ne dépend que de la situation de ses deux extrémités relativement au petit arc ds' ; elle est égale, comme cela doit être, au produit du rayon a par la valeur qui résulte de celle que nous avons obtenue (page 12 de ce Mémoire) pour la force qu'exerce le conducteur mobile sur une petite portion égale à ds' d'un conducteur rectiligne, suivant cet arc ds' : lorsqu'on veut l'action d'un arc fini, il faut intégrer de nouveau par rapport à s', et cette seconde intégration donne en général un résultat différent dans les deux cas; mais ce résultat est le même quand le conducteur mobile a une de ses extrémités dans l'axe, et l'autre sur la circonférence dont l'arc s' fait partie. Le signe seul de la valeur qu'on obtient se trouve changé, parce que, dans un cas, β augmente avec s, et qu'il diminue dans l'autre; car alors l'angle β, est droit, et l'angle $\beta_{,,}$ est compris entre une corde et une tangente menée par l'extrémité, d'où il est aisé de conclure

$$r = 2a \sin\beta, \quad s' = C - 2a\beta, \quad ds' = -2a\,d\beta,$$

ce qui donne

$$\frac{ds'}{r} = -\frac{d\beta}{\sin\beta},$$

et pour la valeur du moment cherché

$$\tfrac{1}{2} a i i' \int \frac{\cos^2\beta\, d\beta}{\sin\beta},$$

qui se présente sous la même forme que celle de la force dans le cas du conducteur rectiligne, et s'intègre précisément de même. La raison de cette analogie entre ces deux cas, d'ailleurs si différens, se trouve dans

cette circonstance, que dans celui du conducteur rectiligne on avait

$$r = \frac{a}{\sin\beta}, \quad s = -a\cot\beta, \quad \mathrm{d}s' = \frac{a\,\mathrm{d}\beta}{\sin^2\beta},$$

d'où l'on tire

$$\frac{\mathrm{d}s'}{r} = \frac{\mathrm{d}\beta}{\sin\beta},$$

qui ne diffère que par le signe de la valeur de $\frac{\mathrm{d}s'}{r}$ dans le cas du conducteur circulaire; ce qui doit être parce que, dans le premier, β diminue quand s' augmente, et qu'il augmente avec s' dans le second.

Considérons maintenant deux conducteurs rectilignes dont les directions forment un angle droit, mais ne soient pas situées dans un même plan, en nommant a la droite qui mesure la plus courte distance de ces directions, et en prenant les points où elles sont rencontrées par la droite a pour l'origine de s et de s', on a

$$r^2 = a^2 + s^2 + s'^2, \quad r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s'}\,\mathrm{d}s' = s'\,\mathrm{d}s',$$

et

$$\cos\beta = -\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s'} = -\frac{s'}{r}.$$

Mais nous avons vu (page 17 de ce Mémoire) que l'action mutuelle des deux élémens $\mathrm{d}s$ et $\mathrm{d}s'$ est en général égale à

$$\tfrac{1}{2}ii'\frac{\mathrm{d}s'}{\cos\beta}\,\mathrm{d}\frac{\cos^2\beta}{r};$$

on peut donc l'écrire ainsi

$$\tfrac{1}{2}ii'\,rs'\,\mathrm{d}s'\,\mathrm{d}\frac{1}{r^3};$$

et comme il faut multiplier cette force par $\frac{a}{r}$ pour avoir sa composante parallèle à la droite a, on trouve que la valeur de cette composante est

$$-\tfrac{1}{2}\,a\,i\,i'\,s'\,\mathrm{d}s'\,\mathrm{d}\,\frac{1}{r^3},$$

en l'intégrant par rapport à s entre deux points dont les distances à l'élément $\mathrm{d}s'$ soient r' et r'', on a

$$-\tfrac{1}{2}\,a\,i\,i'\,s'\,\mathrm{d}s'\left(\frac{1}{r''^3}-\frac{1}{r'^3}\right),$$

qu'on peut écrire ainsi

$$-\tfrac{1}{2}\,a\,i\,i'\left(\frac{1}{r''^2}\cdot\frac{\mathrm{d}r''}{\mathrm{d}s'}\,\mathrm{d}s'-\frac{1}{r'^2}\cdot\frac{\mathrm{d}r'}{\mathrm{d}s'}\,\mathrm{d}s'\right),$$

dont l'intégrale, prise pour le premier terme de r_i'' à r_{ii}'' et pour le second de r_i' à r_{ii}', donne

$$\tfrac{1}{2}\,i\,i'\left(\frac{a}{r_{ii}''}-\frac{a}{r_i''}-\frac{a}{r_{ii}'}+\frac{a}{r_i'}\right),$$

en sorte que l'action cherchée est précisément la même que si elle était produite par quatre forces égales à $\frac{1}{2}\,i\,i'$, dirigées suivant les droites qui joignent deux à deux les extrémités des conducteurs, deux de ces forces étant attractives et les deux autres répulsives.

Si l'on veut le moment de rotation imprimé dans le cas que nous examinons ici par un des deux conducteurs rectilignes à l'autre conducteur autour d'un axe parallèle au premier, et dont la plus courte distance à la ligne que nous avons nommée a soit représentée par b, il faudra multiplier la composante parallèle à a de l'action mutuelle des deux élémens par $s'-b$, et

intégrer ensuite de la même manière : comme s' est constant dans la première intégration, il suffira de faire cette multiplication après qu'elle aura été exécutée ; on aura ainsi deux termes de même forme à intégrer de nouveau : le premier sera

$$-\tfrac{1}{2}\,a\,ii'\,\frac{s'-b}{r''^{2}}\cdot\frac{\mathrm{d}r''}{\mathrm{d}s'}\,\mathrm{d}s',$$

et il viendra, en intégrant par partie,

$$\tfrac{1}{2}\,a\,ii'\,\frac{s'-b}{r''}-\tfrac{1}{2}\,a\,ii'\int\frac{\mathrm{d}s'}{r''}.$$

Mais il est aisé de voir qu'en nommant c la valeur de s qui correspond à r'' et qui est une constante dans l'intégration actuelle, on a

$$,''=\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{\sin\beta''},\quad s'=-\sqrt{a^2+c^2}\cot\beta'',\quad \mathrm{d}s'=\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{\sin^2\beta''}\,\mathrm{d}\beta'',$$

ainsi

$$\int\frac{\mathrm{d}s'}{r''}=\int\frac{\mathrm{d}\beta''}{\sin\beta''}=\mathrm{l}\,\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta_{,}''}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta_{,}''};$$

le second terme s'intégrera de la même manière, et l'on aura enfin, pour le moment de rotation cherché,

$$\tfrac{1}{2}aii'\left(\frac{s_{,}'-b}{r_{,}''}-\frac{s_{,}'-b}{r_{,}''}-\frac{s_{,}'-b}{r_{,}'}+\frac{s_{,}'-b}{r_{,}'}-\mathrm{l}\,\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta_{,}''\operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta_{,}'}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta_{,}''\operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta_{,}'}\right).$$

Dans le cas où l'axe de rotation parallèle à la droite s passe par le point d'intersection des deux droites a et s', on a $b=0$; et si l'on suppose, en outre, que le courant qui parcourt s' part de ce point d'intersection, on aura de plus

$$s_{,}'=0,\quad \beta_{,}'=\frac{\pi}{2},\quad \beta_{,}''=\frac{\pi}{2},$$

en sorte que la valeur du moment de rotation se réduira à

$$\tfrac{1}{2} a i i' \left(\frac{s_{u}''}{r_{u}''} - \frac{s_{u}'}{r_{u}'} - 1 \frac{\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \beta_{u}''}{\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \beta_{u}'} \right).$$

Nous venons de voir que quand les directions des deux conducteurs rectilignes dont on cherche l'action mutuelle forment un angle droit, celle des deux élémens $\mathrm{d}s$ et $\mathrm{d}s'$ se réduit à

$$-\tfrac{1}{2} i i' r s' \, \mathrm{d}s' \, \mathrm{d} \frac{1}{r^3},$$

et qu'on a, dans le même cas,

$$r = \sqrt{a^2 + s^2 + s'^2} :$$

cette action élémentaire peut donc s'écrire ainsi

$$-\tfrac{1}{2} i i' s' \, \mathrm{d}s' \sqrt{a^2 + s^2 + s'^2} \, \mathrm{d} (a^2 + s^2 + s'^2)^{-\frac{3}{2}}$$
$$= \tfrac{3}{2} i i' \frac{s s' \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}s'}{(a^2 + s^2 + s'^2)^2}.$$

Comme elle agit dans la direction de la droite r, il faut, pour trouver le moment de rotation qui en résulte autour de la droite a, la multiplier par le sinus de l'angle compris entre sa direction et celle de cette droite, qui est égal à

$$\frac{\sqrt{s^2 + s'^2}}{\sqrt{a^2 + s^2 + s'^2}},$$

et par leur plus courte distance

$$\frac{s s'}{\sqrt{s^2 + s'^2}},$$

c'est-à-dire qu'il faut multiplier la force par la quantité

$$\frac{ss'}{\sqrt{a^2+s^2+s'^2}},$$

que je représenterai par q, ce qui donne

$$\frac{d^2M}{ds\,ds'}\,ds\,ds' = \tfrac{3}{2}ii'\,\frac{s^2s'^2\,ds\,ds'}{(a^2+s^2+s'^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Cette valeur ne paraît pas d'abord facile à intégrer; mais si l'on différencie la valeur de q une fois par rapport à s, et l'autre en faisant varier s', on a

$$\frac{dq}{ds} = \frac{s'}{\sqrt{a^2+s^2+s'^2}} - \frac{s's^2}{(a^2+s^2+s'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a^2s'+s'^3}{(a^2+s^2+s'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{d^2q}{ds\,ds'} = \frac{a^2+3s'^2}{(a^2+s^2+s'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3(a^2+s'^2)s'^2}{(a^2+s^2+s'^2)^{\frac{5}{2}}} =$$

$$\frac{a^2}{(a^2+s^2+s'^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3s^2s'^2}{(a^2+s^2+s'^2)^{\frac{5}{2}}},$$

en sorte que

$$\frac{d^2M}{ds\,ds'}\,ds\,ds' = \tfrac{1}{2}ii'\left[\frac{d^2q}{ds\,ds'}\,ds\,ds' - \frac{a^2\,ds\,ds'}{(a^2+s^2+s'^2)^{\frac{3}{2}}}\right];$$

la quantité

$$\frac{a^2\,ds\,ds'}{(a^2+s^2+s'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

intégrée d'abord par rapport à s de manière que l'intégrale devienne nulle avec s, donne

$$\frac{a^2\,s\,ds'}{(a^2+s'^2)\sqrt{a^2+s^2+s'^2}},$$

qu'il reste à intégrer en ne faisant varier que s', le moyen le plus simple pour y parvenir est de faire

$$\sqrt{a^2+s^2+s'^2}=\sqrt{u}-s',$$

ce qui donne

$$s'=\frac{u-a^2-s^2}{2\sqrt{u}},\quad \frac{ds'}{\sqrt{a^2+s^2+s'^2}}=\frac{du}{2u},$$

$$a^2+s'^2=\frac{(u-a^2-s^2)^2+4a^2u}{4u}=\frac{(u+a^2-s^2)^2+4a^2s^2}{4u},$$

et change la quantité à intégrer en

$$\frac{\frac{a\,du}{2as}}{1+\frac{(u+a^2-s^2)^2}{4a^2s^2}},$$

dont l'intégrale, prise de manière qu'elle s'évanouisse quand $s'=0$, est

$$a\left\{\text{arc tang}\frac{(s'+\sqrt{a^2+s^2+s'^2})^2+a^2-s^2}{2as}-\text{arc tang}\frac{a}{s}\right\},$$

qui se réduit, en exécutant les opérations indiquées et en calculant par la formule connue la tangente de la différence des deux arcs, à

$$a\,\text{arc tang}\frac{ss'}{a\sqrt{a^2+s^2+s'^2}}=a\,\text{arc tang}\frac{q}{a}.$$

On a donc pour la valeur du moment M de rotation, dans le cas où les deux courans électriques, dont les longueurs sont s et s', partent des points où leurs directions rencontrent la droite qui en mesure la plus courte distance,

$$M = \tfrac{1}{2} ii' \left(q - a \text{ arc tang } \frac{q}{a}\right).$$

Quand $a = 0$, on a évidemment $M = \frac{1}{2} ii' q$, ce qui s'accorde avec la valeur $M = \frac{1}{2} ii' p$ que nous avons déjà trouvée (page 20), parce qu'alors q devient la perpendiculaire que nous avions désignée par p. Si l'on suppose a infini, M devient nul, comme cela doit être, à cause que dans ce cas a arc tang $\frac{q}{a} = q$.

Si l'on nomme z l'angle dont la tangente est

$$\frac{ss'}{a\sqrt{a^2 + s^2 + s'^2}},$$

on aura

$$M = \tfrac{1}{2} ii' q \left(1 - \frac{z}{\text{tang } z}\right);$$

c'est la valeur du moment de rotation qui serait produit par une force égale à

$$\tfrac{1}{2} ii' \left(1 - \frac{z}{\text{tang } z}\right),$$

agissant suivant la droite qui joint les deux extrémités des conducteurs opposées à celles où ils sont rencontrés par la droite qui en mesure la plus courte distance.

Il est, au reste, aisé de voir que si, au lieu de supposer que les deux courans partent du point où ils rencontrent la droite, on avait fait le calcul pour des limites quelconques, on aurait trouvé une valeur de M composée de quatre termes de la forme de celui que nous avons obtenu dans ce cas particulier, deux de ces termes étant positifs et les deux autres négatifs.

En combinant le dernier résultat que nous venons

d'obtenir avec celui que nous avions trouvé immédiatement auparavant, il est aisé de calculer le moment de rotation résultant de l'action d'un conducteur ayant pour forme le périmètre d'un rectangle et agissant sur un conducteur mobile autour d'un des côtés du rectangle, lorsque la direction de ce conducteur est perpendiculaire au plan du rectangle, quelle que soit d'ailleurs sa distance aux autres côtés du rectangle et les dimensions de celui-ci. En déterminant par l'expérience l'instant où le conducteur mobile est en équilibre entre les actions opposées de deux rectangles situés dans le même plan, mais de grandeurs différentes et à des distances différentes du conducteur mobile, on a un moyen bien simple de se procurer des vérifications de ma formule susceptibles d'une grande précision : c'est ce qu'on peut faire aisément avec l'instrument dont j'ai parlé plus haut, en modifiant convenablement les conducteurs fixes qui en font partie.

On peut faire les mêmes calculs pour une valeur quelconque de l'angle des directions des deux conducteurs rectilignes : en nommant cet angle ε, on a

$$r = \sqrt{a^2 + s^2 + s'^2 - 2ss'\cos\varepsilon},$$

et on trouve que la force parallèle à la droite a est égale à

$$\tfrac{1}{2} i i' \left(\frac{a}{r} + a\cos\varepsilon \iint \frac{ds\,ds'}{r^3} \right).$$

En représentant toujours par q la quantité $\frac{ss'}{r}$, on obtient, pour la valeur du moment de rotation autour de la droite a,

$$\tfrac{1}{2} i i' \left(q\sin\varepsilon - r\cot\varepsilon - \frac{a^2}{\sin\varepsilon} \iint \frac{ds\,ds'}{r^3} \right).$$

Quant à l'intégrale qui entre dans ces expressions, j'ai trouvé, par un procédé particulier que j'expliquerai ailleurs, qu'en la prenant depuis $s=0$ et $s'=0$, on a

$$\int\int \frac{ds\,ds'}{r^3} = \frac{1}{a\sin\varepsilon}\left(\text{arc tang}\frac{ss'\sin^2\varepsilon + a^2\cos\varepsilon}{a\sin\varepsilon\sqrt{a^2+s^2+s'^2-2ss'\cos\varepsilon}} - \text{arc tang}\frac{a\cot\varepsilon}{\sqrt{a^2+s^2}} - \text{arc tang}\frac{a\cot\varepsilon}{\sqrt{a^2+s'^2}} + \frac{\pi}{2} - \varepsilon\right),$$

ce qu'on peut aisément vérifier par la différentiation.

Je terminerai ce Mémoire en démontrant que la valeur de l'action d'un très-petit circuit électro-dynamique formant une courbe plane exerce sur un élément de conducteur voltaïque, calculée en négligeant les dimensions de ce circuit relativement à la distance où il est de l'élément, est indépendante de la forme du circuit, et qu'elle ne dépend que de sa position relativement à cet élément, et de la surface de l'aire qu'il circonscrit, surface à laquelle cette action est proportionnelle.

J'ai fait voir, dans le *Précis de la Théorie des Phénomènes électro-dynamiques*, que j'ai publié l'année dernière, que l'action dont il s'agit se réduit à une force normale à l'élément, et passant par son milieu, qui ne dépend en grandeur et en direction que de trois quantités que j'ai nommées A, B, C; qu'elle augmente ou diminue proportionnellement à ces quantités quand elles croissent ou décroissent toutes trois dans le même rapport, et que ce changement n'en apporte aucun dans sa direction. Il suffit donc de démontrer qu'une de ces trois quantités, C, par exemple, est indépendante de la forme du petit circuit et proportionnelle à l'aire plane qu'il circonscrit, la même démonstration s'appliquant aux deux autres.

Prenons pour coodonnées dans le plan des xy, auquel se rapporte la quantité C, l'angle $XOP=\varphi$ (fig. 7) la distance $OP=u$, et l'ordonnée verticale $PM=z$, nous aurons

$$OM=r=\sqrt{u^2+z^2} \text{ et } C=\int\frac{x\,dy-y\,dx}{r^{n+1}}=\int\frac{u^2\,d\varphi}{r^{n+1}},$$

cette intégrale devant être prise dans toute l'étendue du petit circuit MLN, les élémens dont elle se compose étant de signes contraires aux points correspondans M et N et plus grands en M, si l'on regarde comme infiniment petite la droite MN, et sa projection PQ, cette dernière pourra être représentée par δu, et comme les points M, N répondent à une même valeur de φ, en sorte que $\delta\,d\varphi=0$, il faudra remplacer l'expression que nous venons de trouver pour C par

$$C=-\delta\int\frac{u^2\,d\varphi}{r^{n+1}}=\int\left(\frac{(n+1)\,u^2\,\delta r}{r^{n+2}}-\frac{2\,u\,\delta u}{r^{n+1}}\right)d\varphi.$$

On a évidemment $r\,\delta r=u\,\delta u+z\,\delta z$, lorsqu'on représente par δz la différence qN des deux ordonnées PM, QN : or, en prolongeant les deux droites NM, qM, qui sont dans le plan ZOX, jusqu'à ce qu'elles rencontrent aux points G, H l'axe des z, et en nommant q la perpendiculaire OE, abaissée du milieu O de l'élément ds' sur le plan du circuit MLN, et ζ l'angle qu'elle forme avec cet axe, on a

$$HG=PM-OG=z-\frac{q}{\cos\zeta},$$

ce qui donne, à cause des triangles semblables GHM, MqN,

$$\delta z=Nq=\frac{GH\times Mq}{HM}=\frac{z\cos\zeta-q}{u\cos\zeta}\,\delta u,$$

d'où

$$\delta r = \frac{u\delta u + z\delta z}{r} = \frac{(u^2+z^2)\cos\zeta - qz}{ru\cos\zeta}\,\delta u = \frac{r^2\cos\zeta - qz}{ru\cos\zeta}\,\delta u.$$

En substituant cette valeur dans celle de C, on trouve

$$C = \int\left\{\frac{(n+1)(r^2\cos\zeta - qz)u\delta u}{r^{n+3}\cos\zeta} - \frac{2u\delta u}{r^{n+1}}\right\}\mathrm{d}\varphi$$

$$= \int\frac{(n-1)r^2\cos\zeta - (n+1)qz}{r^{n+3}\cos\zeta}\,u\mathrm{d}\varphi\delta u.$$

Si l'on représente par l et h les valeurs de r et de z correspondantes à un point pris à volonté dans l'intérieur de l'aire plane MLN, on pourra, en négligeant les quantités infiniment petites, écrire l au lieu de r, et h au lieu de z, ce qui donnera

$$C = \frac{(n-1)l^2\cos\zeta - (n+1)hq}{l^{n+3}\cos\zeta}\int u\mathrm{d}\varphi\delta u;$$

mais $\int u\mathrm{d}\varphi\delta u$ est l'expression de l'aire PQR, projection sur le plan des xy de l'aire MLN, en sorte qu'en désignant cette dernière par λ, on a $\int u\mathrm{d}\varphi\delta u = \lambda\cos\zeta$ et

$$C = \lambda\left\{\frac{(n-1)\cos\zeta}{l^{n+1}} - \frac{(n+1)hq}{l^{n+3}}\right\},$$

cette valeur est précisément celle que j'ai trouvée dans mon *Précis de la Théorie des Phénomènes électrodynamiques*, page 18, pour la quantité U la même que je représente ici par C : seulement la surface λ se trouve substituée à πm^2, qui lui est égal dans le cas où les circuits sont des circonférences dont le rayon est m, seul cas dont je me fusse alors occupé.

Il suit de ce résultat, extrêmement remarquable, que toutes les conséquences que M. Savary a déduites de ma

formule, relativement à l'action d'un solénoïde formé de courans circulaires de même diamètre et équidistans, d'où résulte l'identité dans tous les cas de cette action et de celle d'une particule d'aimant, sont applicables à un solénoïde formé de courans décrivant de très-petites courbes fermées et planes, de même surface et situées dans des plans équidistans perpendiculaires à la ligne droite ou courbe qui sert d'axe à ce solénoïde.

Lettre *de M.* Ampère *à M.* Gherardi *sur divers phénomènes électro-dynamiques.*

« Monsieur,

» J'ai mille remercîmens à vous faire de l'exemplaire de vos observations sur l'ouvrage de M. le chevalier Leopoldo Nobili, que vous avez eu la bonté de m'envoyer.

» Les réponses que vous faites à plusieurs objections proposées dans cet ouvrage contre quelques parties de ma théorie des phénomènes électro-dynamiques m'ont paru en général très-justes, et je pense qu'elles ne laissent rien à désirer sur ce sujet. La plupart s'étaient présentées à mon esprit quand je lus l'ouvrage de M. Leopoldo Nobili, ouvrage où se trouvent d'ailleurs des recherches sur diverses circonstances des phénomènes électro-dynamiques qui m'ont paru pleines d'intérêt.

» Vous avez très-bien montré, Monsieur, que les résultats de toutes les expériences décrites dans cet ouvrage sont entièrement conformes à ce qu'on déduit de la manière dont j'ai expliqué les phénomènes électro-

dynamiques. Je crois cependant devoir ajouter deux observations à celles que vous avez faites sur ce sujet. La première est relative à ce que, dans ma lettre à M. Faraday, en date du 18 avril 1823, j'avais dit que l'action mutuelle de deux circuits fermés ou de deux assemblages de circuits fermés ne peut produire le mouvement de rotation continue dans l'un de ces circuits ou de ces assemblages (*voyez* mon *Recueil d'Observations électro-dynamiques*, page 366). Vous avez raison, ainsi que M. de Nobili, de me reprocher d'avoir, dans ce passage d'une lettre écrite rapidement, énoncé d'une manière trop générale une chose qui n'est vraie que des circuits fermés, ou assemblages de circuits fermés qui sont *solides*, c'est-à-dire, de *forme invariable dans toute leur étendue*. Qu'elle soit vraie dans ce cas, c'est ce qu'il vous sera facile de vérifier, parce que, dans toutes les positions des deux circuits fermés où l'un d'eux tend à imprimer à l'autre un mouvement de rotation continue, il arrive, à mesure que ce mouvement a lieu, que le circuit fermé mobile vient s'appuyer sur l'autre, et que le mouvement ne peut continuer qu'autant que l'un des deux circuits a, dans l'endroit où ils se rencontrent, une portion liquide que l'autre puisse traverser. Mais si j'ai eu tort, dans le passage en question de ma lettre à M. Faraday, de ne pas énoncer cette restriction en disant : « Des circuits fermés solides et » de forme invariable dans toute leur étendue », c'est que je pensais qu'on verrait bien, en lisant ce passage, que j'entendais parler seulement de cette sorte de circuits, puisque l'expérience même de M. Faraday, où un aimant tourne continûment autour d'un conducteur

vertical, m'était connue depuis long-temps, et qu'il est évident que, d'après ma formule, le mouvement continu de rotation doit avoir lieu, dans ce cas, soit que le courant électrique traverse ou ne traverse pas l'aimant, pourvu que le mercure dans lequel il est établi puisse s'ouvrir pour laisser passer cet aimant, en un mot, pourvu que le circuit fixe soit en partie liquide. J'étais d'autant plus fondé à penser que l'on restreindrait aux circuits fermés *solides* ce que je disais relativement à l'impossibilité de produire un mouvement de rotation continue par leur action mutuelle, que cette restriction, oubliée dans ma lettre à M. Faraday, se trouve énoncée de la manière la plus complète dans deux autres endroits de mon *Recueil d'Observations électro-dynamiques.*

» Voici comme je me suis exprimé à la page 235 de ce Recueil : « Dès que j'eus connaissance, à la fin » d'octobre 1821, du Mémoire où M. Faraday avait » publié, peu de temps auparavant, son importante » découverte du mouvement continu de rotation d'un » conducteur voltaïque autour d'un aimant, et d'un ai- » mant autour d'un conducteur, et où il avait annoncé » qu'il n'avait pu faire tourner, par l'action de ce der- » nier, un aimant autour de son axe, je cherchai à pro- » duire cette sorte de mouvement en faisant agir des » aimans, disposés de toutes les manières que je pus » imaginer, sur les conducteurs mobiles dont je m'étais » servi jusqu'alors dans toutes mes expériences, et dont » les deux extrémités se trouvaient dans l'axe de rota- » tion. Je parvins bientôt à ce résultat général, que » tant que cette circonstance a lieu dans un conducteur » dont toutes les parties *sont liées invariablement* entre

» elles, le mouvement continu de rotation est impos-
» sible, et il me fut facile d'en conclure qu'il l'est éga-
» lement par l'action mutuelle d'un aimant et d'un
» circuit fermé de *forme invariable*, puisqu'un tel cir-
» cuit peut toujours être considéré comme la réunion
» de deux portions de conducteurs dont les extrémités
» sont dans un même axe de rotation pris à volonté. »

» Et à la page 356, en répétant qu'il est impossible de produire cette sorte de mouvement en employant seulement des aimans ou des conducteurs *solides* formant des circuits fermés, j'ai expliqué, par une note placée au bas de cette page, l'expression *conducteurs solides* en ces termes : « On entend ici, par cette expres-
» sion, que toutes les parties de la portion du conduc-
» teur qui forme un circuit fermé ou presque fermé
» sont invariablement liées entr'elles, et ne peuvent
» changer de situation respective. Lorsque cette portion
» est composée de deux ou de plusieurs pièces mobiles
» séparément, ou qu'elle est formée en tout ou en par-
» tie d'un liquide conducteur, le mouvement de rotation
» continue devient possible. »

» Vous voyez, Monsieur, que la restriction qui rend exact ce que j'ai dit sur le cas où le mouvement de rotation devient impossible est exprimée de la manière la plus expresse dans cette note, qui se trouve dans mon Recueil, immédiatement avant ma lettre à M. Faraday, et qui y a été publiée il y a plus de deux ans.

» La seconde observation se rapporte à la remarque que vous avez faite page 16 de votre Mémoire, sur ce que, d'après la valeur

$$\frac{\pi m^2 ii'}{29}(\cos\theta' - \cos\theta'' - \cos\theta_1' + \cos\theta_1''),$$

que j'ai donnée à la page 28 de mon *Précis de la Théorie des phénomènes électro-dynamiques*, pour représenter le moment de rotation produit par l'action d'un solénoïde électro-dynamique sur un conducteur, action qui peut en général être assimilée à celle qu'un aimant exercerait sur le même conducteur, vous avez trouvé qu'en supposant que les deux extrémités du conducteur et les deux poles du solénoïde ou de l'aimant sont à la fois dans l'axe de rotation, le mouvement continu autour de cet axe devait avoir lieu quand un des poles est entre les deux extrémités du conducteur, et l'autre pole hors de l'intervalle compris entre ces extrémités. Ce résultat de ma formule est d'accord avec celui de l'expérience qu'on fait au moyen de l'appareil représenté ici (fig. 1), quoique, dans cet appareil, l'extrémité inférieure N du conducteur mobile $MABN$ qui plonge dans le mercure de la coupe PQ ne se termine pas précisément à l'axe. Cela vient, d'une part, de ce que les cosinus des angles θ_1' et θ_1'', relatifs à l'extrémité N, ne diffèrent que très-peu des valeurs -1 et $+1$ que prendraient ces cosinus si elle était exactement dans l'axe; et d'autre part, de ce que la valeur du moment de rotation en fonction des angles θ', θ'', θ_1', θ_1'' est applicable à ce cas parce que les divers points du conducteur sont à des distances des courans de l'aimant beaucoup plus grandes que les rayons des circonférences décrites par ces courans. Mais si l'on pouvait supposer que le conducteur pénétrant dans l'aimant vînt se terminer à un point D de l'axe situé dans l'intérieur de cet aimant, on ne peut plus dire précisément ce qui aurait lieu dans cette supposition, impossible d'ailleurs à réa-

liser. En effet, les points de la portion CD du conducteur mobile se trouvant comme infiniment près des courans de l'aimant, on ne pourrait plus considérer les rayons des circonférences que décrivent ces courans, comme très-petits relativement aux distances entre elles et les points dont nous parlons; dès-lors l'expression du moment de rotation, qui a été calculée en négligeant les puissances de ces rayons supérieures à la troisième, cesserait de donner la valeur de ce moment. C'est pourquoi, lorsqu'on remplace, dans l'appareil que nous venons de décrire, l'aimant par une hélice électrodynamique, il y a encore mouvement de rotation continue tant que l'extrémité inférieure N du conducteur mobile est en dehors de cette hélice, comme elle est en dehors de l'aimant LL' (fig. 1); mais si, cette hélice ayant toujours pour axe celui autour duquel le conducteur mobile est assujetti à tourner, on dispose le conducteur mobile comme on le voit (fig. 2), de manière que son extrémité inférieure N soit, comme la supérieure M, exactement dans l'axe, en faisant passer la portion horizontale BC de ce conducteur entre les spires de l'hélice, il n'aura plus aucune tendance à tourner autour de l'axe de ces spires, parce que pour chacune d'elle il y aura sur BC un point O tel que le moment de rotation que l'action de la spire imprime à la portion $MABO$ pour la faire tourner dans un sens sera détruit par un moment égal et de signe contraire résultant de l'action de la même spire pour faire tourner la portion OC en sens contraire. L'opposition de ces deux actions n'a évidemment lieu que parce que la portion OC du conducteur mobile se trouve dans l'in-

térieur de l'hélice, tandis que la portion $MABO$ est en dehors : or, cette circonstance ne peut exister qu'autant qu'il y a des points du conducteur mobile à une distance des deux spires entre lesquelles il passe moindre que celle d'une spire à l'autre, et dès-lors la valeur du moment de rotation en fonction des angles $\theta', \theta'', \theta'_1, \theta''_1$, n'est plus applicable puisqu'elle repose sur ces deux suppositions que la distance de deux courans circulaires consécutifs est infiniment petite, et que celle des divers points du conducteur mobile à ces courans est très-grande relativement aux rayons des cercles qu'ils décrivent. Ce cas où la valeur trouvée pour le moment de rotation n'a plus lieu est au reste particulier aux hélices électro-dynamiques, et ne peut exister à l'égard des aimans, puisque le conducteur mobile ne peut passer entre les courans électriques auxquels ils doivent leurs propriétés, et que les rayons des cercles décrits par ces courans sont d'une petitesse de l'ordre des dimensions des particules des corps.

» De tout cela il ne résulte aucune dissemblance réelle entre la manière d'agir d'un aimant et celle d'un soléentre la manière d'agir d'un aimant et celle d'un solénoïde électro-dynamique; on voit que l'hélice que nous substituons à ce dernier agit comme l'aimant, à l'exception du seul cas où une portion du conducteur mobile passe entre ses spires, et s'étend dans l'intérieur de cette hélice, ce qui ne peut avoir lieu à l'égard de l'aimant dont les courans circulaires entourent chaque particule. On voit en même temps pourquoi la valeur du moment de rotation rappelée plus haut cesse, dans le même cas, d'exprimer l'action de l'hélice, quoiqu'elle représente toujours exactement celle des aimans, et

comment la rotation continue du conducteur mobile, disposé comme dans la fig. 1, n'est nullement contraire au cas d'équilibre dont j'ai déduit, entre les deux constantes k et n de ma formule, la relation

$$2k + n = 1,$$

et que j'ai constaté par l'expérience décrite aux pag. 311 et 312 de mon *Recueil d'Observations électro-dynamiques*. Dans cette expérience, l'équilibre a lieu entre les deux actions exercées par le conducteur circulaire horizontal; la première, dans un sens, sur la portion du conducteur mobile qui répond à l'intérieur de ce conducteur circulaire; la seconde, en sens contraire, sur la portion du conducteur mobile qui lui est extérieur : or, dans l'appareil (fig. 1), ce dernier est tout extérieur à l'aimant, il n'y a donc d'action que dans un sens, et le mouvement de rotation continue en est une suite nécessaire. Il est inutile d'ajouter que si les actions exercées par le conducteur horizontal sur les deux portions du conducteur mobile dont je viens de parler tendent à le faire tourner en sens opposés, cela vient de ce que le courant de ce dernier conducteur ne peut aller, en s'approchant de celui du conducteur horizontal dans une de ces deux portions sans aller en s'en écartant dans l'autre et réciproquement.

» J'ai l'honneur d'être, etc. »

Paris, 16 août 1825.

Fig. 1.

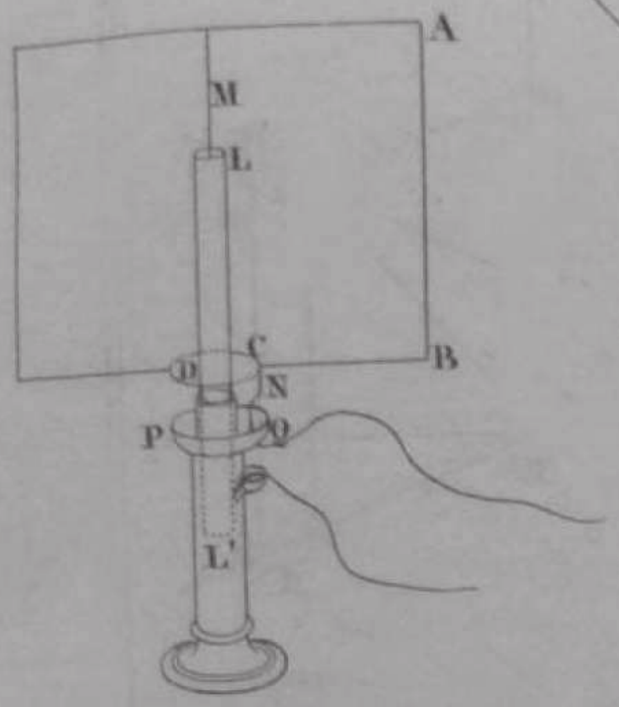

Fig. 5.

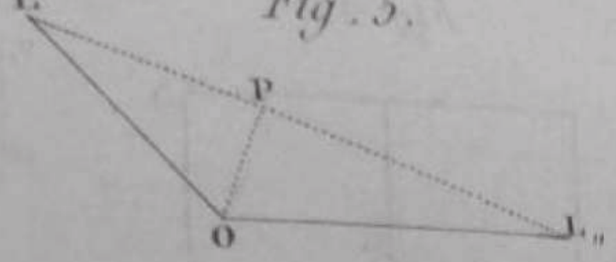

Fig. 2.

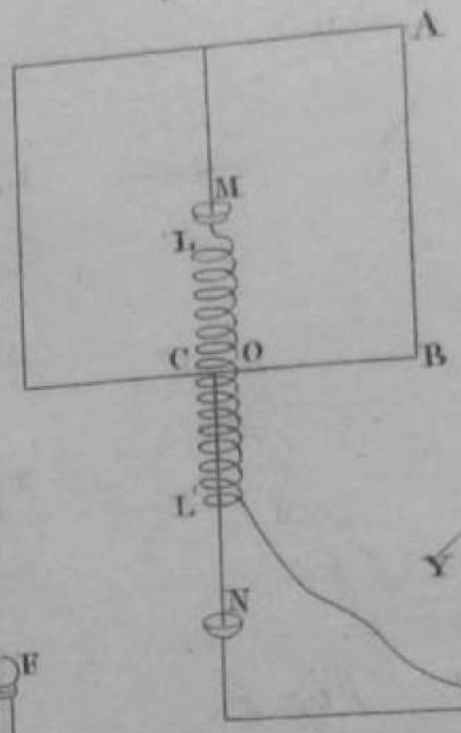

Fig. 7.

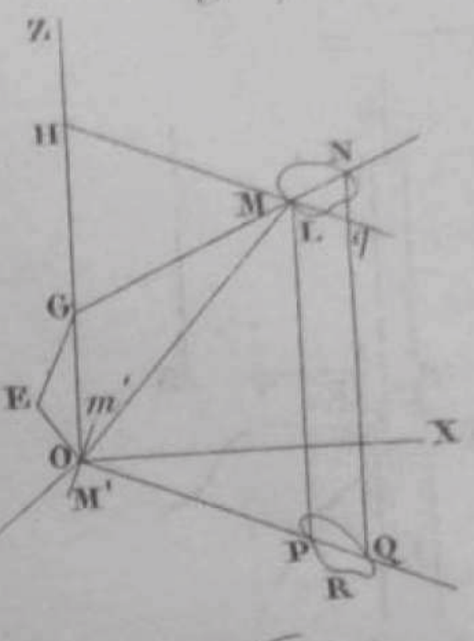

Fig. 4.

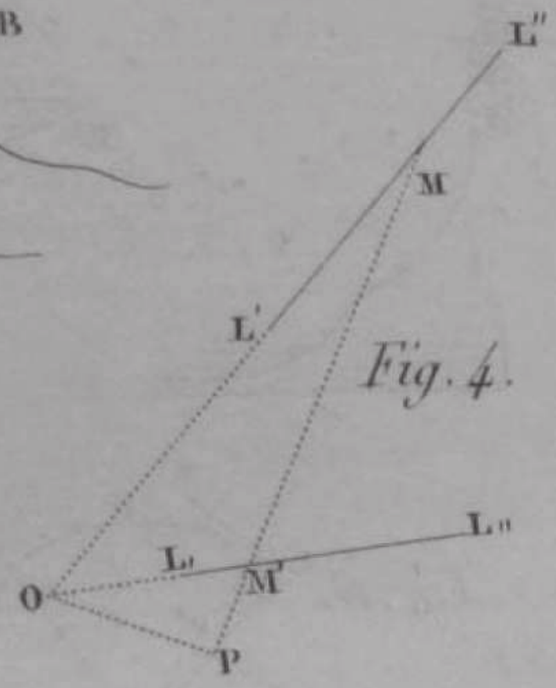

Fig. 6.

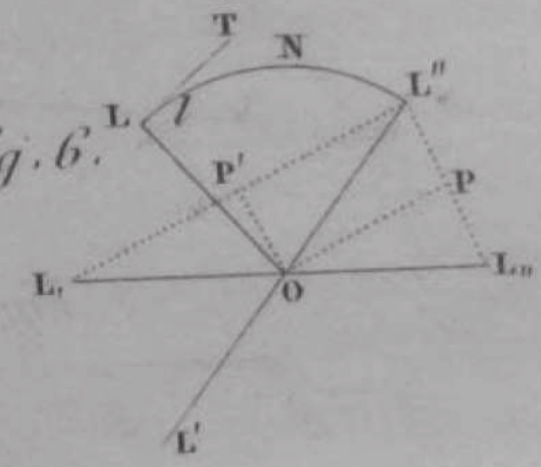

Fig. 3.